PERSAMAAN DEFERENSIAL ORDE SATU

HOMOGENOUS EQUATION

Oleh Dessy Irmawati

2.2 Homogeneous Equation

- Pada pembahasan ini akan dibahas pers diferensial biasa orde satu dimulai dengan cara mengidentifikasi persamaan

2.2.1 Metode Identififkasi

- Bentuk umum persamaan diferensial orde pertama

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

persamaan disebut homogen jika

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

λ untuk semua bilangan real

Definisi 2.2 (Pers Homogen)

- Persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

disebut persamaan homogen jika $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, untuk setiap nilai real λ.

Contoh 2.1

- Tentukan apakah persamaan di bawah ini adalah homogen

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

(d) $y\dfrac{dy}{dx} = x(\ln y - \ln x)$

solusi

(a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

$$f(x, y) = \frac{y - x}{y + x}$$

cek untuk homogenitas

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y - \lambda x}{\lambda y + \lambda x}$$

$$= \frac{y - x}{y + x}$$

$$= f(x, y)$$

jadi persamaan tersebut homogen

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x}^2 - y^2}$$

$$\mathrm{f(x, y)} = \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x}^2 - y^2}$$

cek homogenitas

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x}^2 - y^2}$$

$$= \mathrm{f(x, y)}$$

(c) $$\frac{dy}{dx} = x - y$$

$$f(x, y) = x - y$$

cek homogenitas,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y$$

$$= \lambda(x - y)$$

persamaan tidak homogen

(d) $$y\frac{dy}{dx} = x(\ln y - \ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}(\ln y - \ln x)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y}(\ln y - \ln x)$$

cek

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda y}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{y}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= f(x, y)$$

Solusi persamaan homogen

$$y = xv \text{ atau } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Teknik mencari solusi pers. homogen

- Yakinkan bahwa persamaan homogen
- Subtitusi y = xv dan $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ke dalam persamaan awal
- Pisahkan variabel x dan v
- Integralkan kedua sisi
- Jika ada kondisi awal, maka subtitusikan

contoh

- Cari penyelesaian dari persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$ dengan kondisi awal y(0) = 2

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$cek$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x}^2 + y^2}$$

$$= \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Untuk menyelesaikannya perlu subtitusi y = xv

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x(xv)}{x^2 + (xv)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{v}}{1+\mathrm{v}^2}$$

$$\mathrm{x}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = \frac{v}{1+v^2} - v$$

$$= -\frac{\mathrm{v}^3}{1+v^2}$$

$$\left(\frac{1+v^2}{v^3}\right)dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{v^3}+\frac{1}{v}\right)dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{v^3}+\frac{1}{v}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2v^2} + \ln|v| = -\ln|x| + k$$

$$\ln|v| + \ln|x| = k + \frac{1}{2v^2}$$

$$\ln|\mathrm{xv}| = \mathrm{k} + \frac{1}{2\mathrm{v}^2}$$

$$\text{subtitusi } \mathrm{v} = \mathrm{y}/\mathrm{x},$$

$$\ln|\mathrm{y}| = k + \frac{x^2}{2y^2}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{Ae}^{\mathrm{x}^2/2y^2}, A = e^k$$

$$\text{kondisi awal } \mathrm{x} = 0, \text{ dan } \mathrm{y} = 2$$

$$2 = \mathrm{A}e^0$$

$$A = 2$$

$$y = 2e^{x^2/2y^2}$$

- Temukan penyelesaian persamaan berikut

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2}$$

2) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{xy}$$

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{x^2 + y^2}$$

5) Dengan x = X dan y = Y+2, cari solusi pers berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x + y - 2}$$

Persamaan Linear

- Definisi

persamaan diferensial

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)$$

di mana a(x), b(x), dan c(x) fungsi kontinyu dari x

atau disebut sebagai pers linear orde pertama

contoh

(a) $$x\frac{dx}{dy} - 2y = x + 1$$

(b) $$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = x(y + \sin^{-1} x)$$

(c) $$\frac{dy}{dx} + y^2 = e^x$$

(d) $$2x^2\frac{dy}{dx} + xe^y = \sin x$$

Teknik penyelesaian pers. linear

1. $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

2. Cari p(x) dan menilai

$$\int p(x)dx$$

3. Atur faktor integrasi

$$\rho = e^{\int p(x)dx}$$

4. Kalikan (1) dengan faktor integrasi ρ, sehingga

$$\frac{d}{dx}[\rho y] = \rho q(x)$$

5. Integralkan kedua sisinya kemudian temukan y.
6. Jika ada kondisi awal, maka gunakan untuk mendapatkan nilai konstanta.

$$\mathrm{e}^{\ln \mathrm{f(x)}} = \mathrm{f(x)}, \text{ for } \mathrm{f(x)} > 0$$

contoh

Temukan penyelesaian dari pers diferensial berikut:

1) $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \cos x$, dengan y(0) = 1

2) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = \frac{1}{1-x^2}$

3) Dengan $z=y^2$, ubah pers. Diferensial

$$x^2 y\frac{dy}{dx} - xy^2 = 1$$

ke pers. Linear dalam z. Cari penyelesaian pers. Awal dengan y(1)=1

Persamaan Bernoulli

- Contoh

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \mathrm{n} \neq 1$$

yang mengurangi pers. Linear dengan subtitusi $z = y^{1-n}$

persamaan ini dinamakan James Bernoulli (1654 -1705).

- Tunjukkan jika z = sin y, pers. Diferensial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\tan y}{x} = \frac{\sec y}{x^2}$$

$$\text{pers. dirubah menjadi } \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}$$

solusi

- Diberikan z = sin y, maka

$$\frac{dz}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec y \frac{dz}{dx}$$

- Subtitusikan ke pers. Awal

$$\sec y \frac{dz}{dx} + \frac{\tan y}{x} = \frac{\sec y}{x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{\sin y}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Dengan persamaan llinear z. Maka dapat ditunjukkan faktor integrasi adalah

$$\rho(x) = x$$

Pers. Dapat dituliskan

$$\frac{d}{dx}[xz] = \frac{1}{x} \qquad xz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int d[xz] = \int \frac{dx}{x} \qquad xz = \ln x + A$$

Subtitusikan kembali, sehingga x sin y = ln x +A

contoh

A simple electrical circuit consist of s constant resistant R (in Ohm), a constant inductant L (in henrys) and an electromotive force E(t) (in volts). According to Kirchoff's second law, the current i (in amperes) in the circuit satisfies the equation.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Solve the diffrential equation with the following conditions.

(a) E(t) = Eo is a constant and i = io when t = 0. describe the current i when t → ∞

(b) E(t) = 110 sin 120πt, L=3 henrys, R = 15 Ohm and i = 0 when t =0